$K = \mathbb{Q}$ ή $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ σώμα (για σήμερα) 24/2/20

Επίπεδη αλγεβρική καμπύλη

- Ονομάζουμε το $V(f) = \{(x_0, y_0) \in K^2 \mid f(x_0, y_0) = 0\}$ όπου $f \in K[x,y]$.

- Ρητές καμπύλες

- **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Μια επίπεδη καμπύλη $V(f)$ λέγεται $\boxed{\text{ρητή}}$ αν υπάρχουν ρητές συν/σεις $x(t), y(t)$, δηλ. πηλίκο πολυωνύμων στη μεταβλητή t, τ.ω.:

  α) $f(x(t), y(t)) = 0$

  β) για κάθε σημείο (x_0, y_0) της $V(f)$, εκτός από πεπερασμένες εξαιρέσεις υπάρχει μοναδικό t_0 τ.ω. $x_0 = x(t_0)$, $y = y(t_0)$

$\boxed{\text{π.χ.}}$ $x(t) = \dfrac{t^3}{1}$ $\qquad x(t) = \dfrac{3t^2 - 7t + 2}{t^3 - 1}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

- Ο κύκλος $V(\underbrace{x^2+y^2-1}_{=f})$ είναι ρητή καμπύλη

ΑΠΟΔ: Ισχυρίζομαι ότι $x(t) = \dfrac{2t}{t^2+1}$, $y(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$

Πώς το βρήκα?
Θα το δούμε
αργότερα... "Κρύβεται"
η γεωμετρία!

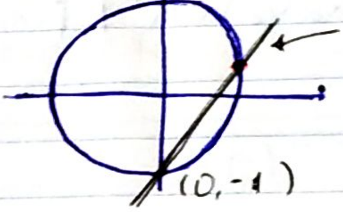
α) $f(x(t), y(t)) = \left(\dfrac{2t}{t^2+1}\right)^2 + \left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 - 1$

$$= \frac{4t^2 + (t^2-1)^2 - (t^2+1)^2}{(t^2+1)^2} =$$

→

$$= \frac{4t^2 + \cancel{t^4} + \cancel{1} - 2t^2 - \cancel{t^4} - \cancel{1} - 2t^2}{(t^2+1)^2} = 0$$

Πώς το σκέφτηκα τώρα αυτό ?



Η ευθεία αυτή είναι η

$y + 1 = t\cdot(x - 0)$

$\Leftrightarrow y + 1 = tx$

Βρήκα το ένα σημείο. Το άλλο ποιο είναι ?

Βρίσκω την τομή της ευθείας $y+1 = tx$ κ. κύκλου $x^2 + y^2 - 1 = 0$:

Λύνω λοιπόν το σύστημα $\begin{cases} y+1 = tx \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

Ξέρω το ένα σημείο τομής, το $(0,-1)$, οπότε θα το χρησιμοποιήσω στις πράξεις για να διευκολυνθώ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+1 = tx \\ x^2 + (y-1)(y+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = tx - 1 \\ x^2 + (tx - 1 - 1)\cdot tx = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = tx - 1 \\ x\cdot(x^2 + t^2 x - 2t) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{x = 0}$ $\underline{\underline{ή}}$ $x\cdot(1 + t^2) = 2t$

(το περίμενα...)

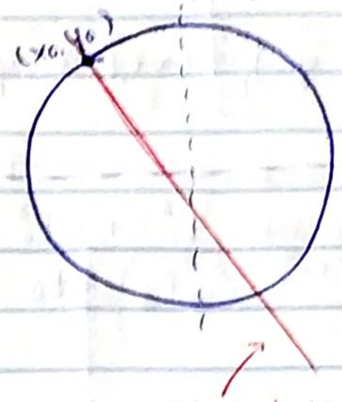
$\Rightarrow$ $x = 0$, $y = -1$ ή $x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$y = tx - 1 = t\cdot\frac{2t}{1+t^2} - 1 = \frac{2t^2 - 1 - t^2}{1+t^2}$$

$$= \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

Άρα $x(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ κ. $y(t) = \dfrac{t^2-1}{1+t^2}$

β)



$(x_0, y_0) \in V(f)$

$\Rightarrow x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$

Ποιο είναι το t_0 που ψάχνω ?

→ Η κλίση αυτής της ευθείας

$y_0 + 1 = t_0 x_0$

άρα $t_0 = \dfrac{y_0+1}{x_0}$

$$x(t_0) = \frac{2t_0}{1+t_0^2} = \frac{2\cdot\frac{y_0+1}{x_0}}{1+\frac{(y_0+1)^2}{x_0^2}} = \frac{2(y_0+1)x_0}{x_0^2+(y_0+1)^2} =$$

$$= \frac{2(y_0+1)x_0}{x_0^2+y_0^2+1+2y_0} = \frac{2(y_0+1)x_0}{1+1+2y_0} = x_0$$

$$y(t_0) = \frac{t_0^2-1}{t_0^2+1} = \frac{\left(\frac{y_0+1}{x_0}\right)^2-1}{\left(\frac{y_0+1}{x_0}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{(y_0+1)^2-x_0^2}{(y_0+1)^2+x_0^2} = \frac{y_0^2+1+2y_0-x_0^2}{y_0^2+1+2y_0+x_0^2} =$$

$$= \frac{y_0^2+y_0^2+2y_0}{2+2y_0} = \frac{2y_0^2+2y_0}{2+2y_0} = \frac{y_0\cdot\cancel{(2y_0+2)}}{\cancel{2+2y_0}} = y_0$$

...Εκτός από ορισμ. σημεία → $x_0 \neq 0$ κ. $t \neq \pm i$

αφού $x(t) = \dfrac{2t}{t^2+1}$

κ. $y(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$

Πως ξερουμε οτι το μοναδικο ?

$\Downarrow$

Μοναδικοτητα: Εστω $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (x(t_1), y(t_1))$

~~Ισχυρ οτι~~ $\cancel{\frac{y_0+1}{x_0}} =$

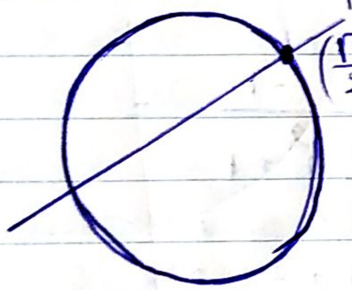
$$\frac{y_0+1}{x_0} = \frac{\frac{t_0^2-1}{t_0^2+1}+1}{\frac{2t_0}{t_0^2+1}} = \frac{t_0^2 \cancel{-1} + t_0^2 \cancel{+1}}{2t_0} = t_0$$

$$\text{κ}\quad \frac{y_0+1}{x_0} = \frac{\frac{t_1^2-1}{t_1^2+1}+1}{\frac{2t_1}{t_1^2+1}} = \ldots = t_1$$

αρα $t_0 = t_1$, δηλ. μοναδικο

Τωρα, γιατι πηρα το σημειο $(0,-1)$?

Εστω οτι παιρνω ενα αλλο σημειο του κυκλου



$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\begin{cases} y - \frac{\sqrt{2}}{2} = t\cdot\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + t\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + t\left(t\cdot\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2}\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ή} \quad x + \frac{\sqrt{2}}{2} + t^2 x - t^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + t\sqrt{2} = 0$$

(δε μ' ενδιαφερει, το ηξερα)

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow x(1+t^2) = t^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - t\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{t^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - t\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1+t^2}}$$

(πηλίκο πολ/μων)

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} + t\left(\frac{t^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - t\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1+t^2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

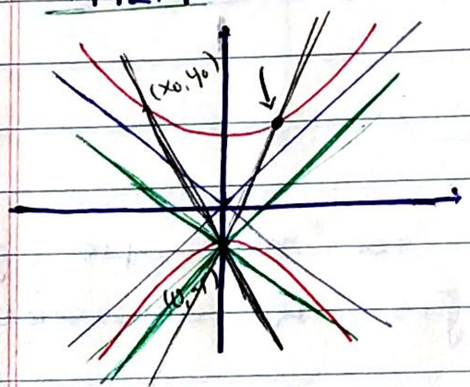
$$\Rightarrow \boxed{y} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 + t\left(\cancel{t^2\frac{\sqrt{2}}{2}} - t\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}t^2}\right)}{1+t^2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 - t^2\sqrt{2} - \sqrt{2}t}{1+t^2} \boxed{= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2 - \sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1+t^2}}$$

Έχει σημασία ποιο σημείο επιλέγω...
π.χ. αν είχα x^2+y^2-3 έχω πρόβλημα

• Δ.ο. η υπερβολή $V(x^2-y^2+1)$ είναι ρητή καμπ

ΛΥΣΗ:



Ίδια διαδικασία.
Βρίσκω ένα σημείο της υπερβολής κ. φέρνω την κλίση κ. ψάχνω το άλλο σημείο (τομής)

$$\begin{cases} x^2-y^2+1=0 \\ y-(-1)=t\cdot(x-0) \Rightarrow y+1=tx \end{cases}$$

άρα $x^2+(1-y)(1+y)=0$

$$\Rightarrow x^2+(1-tx+1)tx = 0 \Rightarrow x\cdot(x+(2-tx)t)=0$$

$\Rightarrow x + 2t - t^2 x = 0 \Rightarrow x\cdot(1 - t^2) = -2t$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{2t}{t^2-1}}$

άρα $y = -1 + tx = -1 + t\cdot\frac{2t}{t^2-1} = \frac{-t^2+1+2t^2}{t^2-1} =$

$= \boxed{\frac{t^2+1}{t^2-1} = y(t)}$

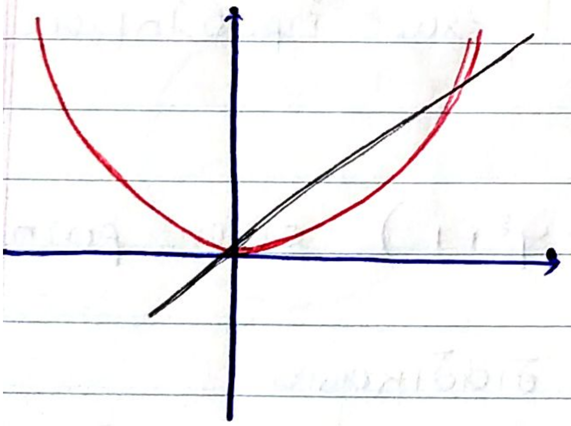
α) $f(x(t), y(t)) = x(t)^2 - y(t)^2 + 1 \overset{\text{αντικ.}}{=} \dots = 0$

β) Ίδια διαδικ.

Εξαιρώ τα $t_0 \neq \pm 1$

• 1.0. η παραβολή $V(y-x^2)$ είναι ρητή καμπ.

ΛΥΣΗ:



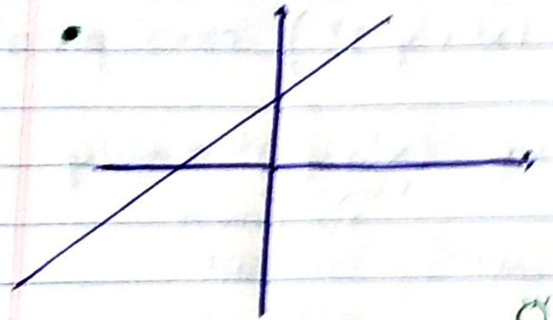
$\exists$ με το μόνο κατευθείαν μία παραμετρικοποίηση

$y(t) = t^2 = \frac{t^2}{1}$

$x(t) = t = \frac{t}{1}$

HW

Όλα αυτά μπορούμε να τα κάνουμε για οποιαδήποτε 2βάθμια εξίσ. κ. οποιαδήποτε παραβολή.



$V(x-y+1)$

Παραμετρικοποίηση

(κατευθείαν με το μάτι):

$x = t-1$

$y = t$

ΩΩ ΗΩ

• Δ.ο. η καμπύλη $V(y^2-x^3-x^2)$ είναι ρητή

ΛΥΣΗ:

Ουσιαστικά ψάχνω λύσεις της $y^2-x^3-x^2=0$

$\Rightarrow y^2 = x^3+x^2$

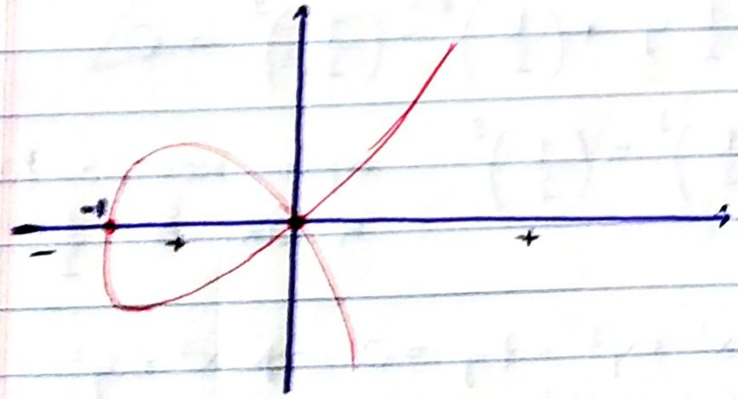
$= x^2(x+1)$

$x<-1 \Rightarrow y^2<0$

$y^2=0 \Rightarrow x^2(x+1)=0$

άρα σίγουρα περνάει από το 0 κ' -1

Πως να την σχεδιάσω, πως σκέφτομαι...



ευθεία που διέρχεται από το (0,0) με κλίση t: $y-0=t(x-0)$

$\boxed{y=tx}$

$$\begin{cases} y^2-x^3-x^2=0 \\ y=tx \end{cases} \Rightarrow t^2x^2-x^3-x^2=0$$

$\Rightarrow x^2(t^2-x-1)=0$

$\Rightarrow x=0$ ή $\boxed{x=t^2-1}$

άρα $y=t^3-t$

• Δ.ο. η καμπύλη $V(xy+(x^2+y^2)^2)$ είναι ρητή

ΛΥΣΗ:

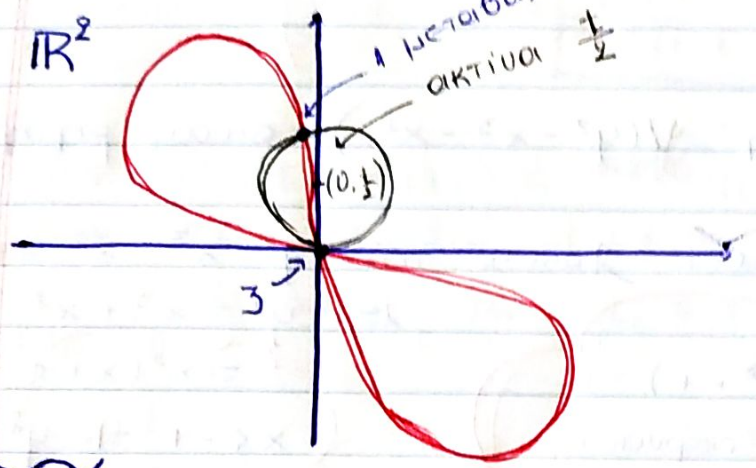
Πώς είναι γεωμετρικά ?... → Έχω $\underbrace{(x^2+y^2)^2}_{>0 \text{ ΠΑΝΤΑ στο } \mathbb{R}^2} = -xy$

αλλά $= -xy$

άρα x,y ετερόσημα

άρα είμαστε στο 2ο κ 4ο τεταρτημόριο

$\mathbb{R}^2$



Αν δοκιμάσουμε ευθείες δε βγαίνει κάτι...

Δε θα πάρω οικογένεια ευθειών.
Θα πάρω οικογένεια κύκλων !

$$x^2+y^2-ty=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2\cdot\frac{t}{2}y+\left(\frac{t}{2}\right)^2-\left(\frac{t}{2}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow x^2+\left(y-\frac{t}{2}\right)^2=\left(\frac{t}{2}\right)^2$$

άρα κέντρο $(0,\frac{t}{2})$ κ ακτίνα $\frac{t}{2}$.

Εφάπτεται σημαίνει ότι τον τέμνει 2 φορές

$$\begin{cases} x^2+y^2-ty=0 \Rightarrow x^2+y^2=ty \\ (x^2+y^2)^2+xy=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (ty)^2+xy=0$$

$$\Rightarrow t^2y^2+xy=0$$

$$\Rightarrow y(t^2y+x)=0$$

$$\Rightarrow \underset{\hookrightarrow(0,0)}{y=0} \text{ ή } t^2y+x=0 \Rightarrow x=-yt^2$$

$$\cancel{(x^2+y^2)^2+xy=0 \overset{x=-yt^2}{\Longrightarrow} ((-y\cdot t^2)^2+y^2)^2-yt^2y=0}$$

$\cancel{\Rightarrow y^2 t^4}$

$$x^2 + y^2 - ty = 0 \xrightarrow{x = -yt^2} y^2 t^4 + y^2 - ty = 0$$

$$\Rightarrow y(yt^4 + y - t) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 \quad ή \quad yt^4 + y - t = 0$$

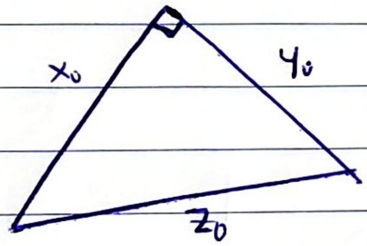
$$\Rightarrow y \cdot (t^4 + 1) - t = 0$$

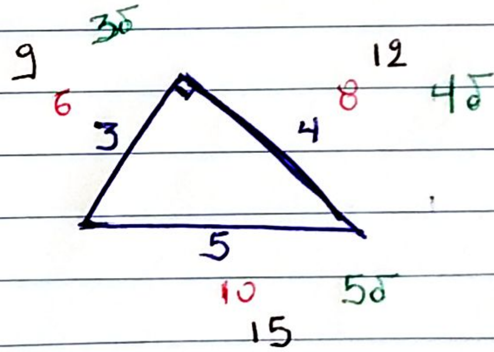
$$\Rightarrow y = \frac{t}{t^4+1} \quad άρα \quad x = -\frac{t^3}{t^4+1}$$

Πυθαγόρειες τριάδες (αναλυτικά στο επόμενο)

x_0, y_0, z_0 φυσικοί αριθμοί τ.ω. $x_0^2 + y_0^2 = z_0^2$

$Μ.Κ.Δ.(x_0, y_0, z_0) = 1 \rightarrow$ αρχική πυθαγόρεια 3άδα





Ευκλείδης: Όλες οι αρχικές πυθαγόρειες 3άδες είναι της μορφής:

$$x = 2uv \qquad\qquad x = u^2 - v^2$$
$$y = u^2 - v^2 \quad ή \quad y = 2uv$$
$$z = u^2 + v^2 \qquad\qquad z = u^2 + v^2$$

όπου u, v είναι ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους με έναν από τους δύο άρτιο κ. τον άλλο περιττό

π.χ. $u = 2,\ v = 1 \rightarrow x = 4,\ y = 3,\ z = 5$

$u = 4,\ v = 1 \rightarrow x = 8,\ y = 15,\ z = 17$